

Leçon 3.1

Oscillateur 1D

Permanent Harmonique

ME-332 – Mécanique Vibratoire

Prof. Guillermo Villanueva

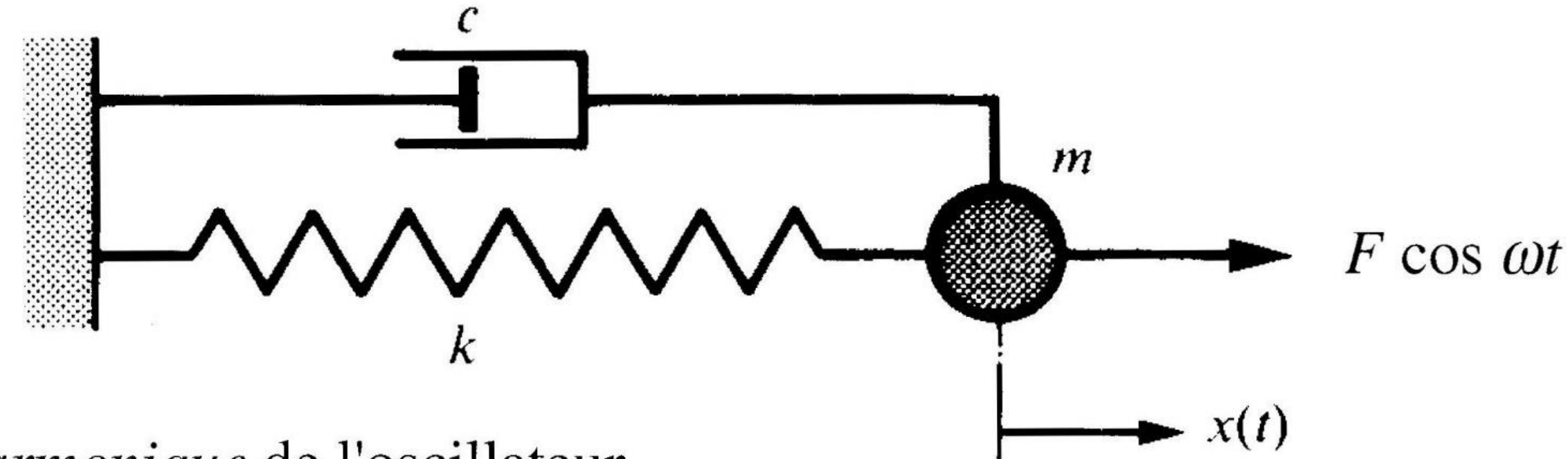
- Régime forcé harmonique
- Solution permanente
- Fonction de transfert
- Résonance en
 - Amplitude
 - Vitesse
 - Accélération
 - Puissance
- Diagramme de Nyquist



Chapitre 4

Régime permanent harmonique

EPFL Régime harmonique – Solution permanente



*Régime forcé harmonique de l'oscillateur
élémentaire*

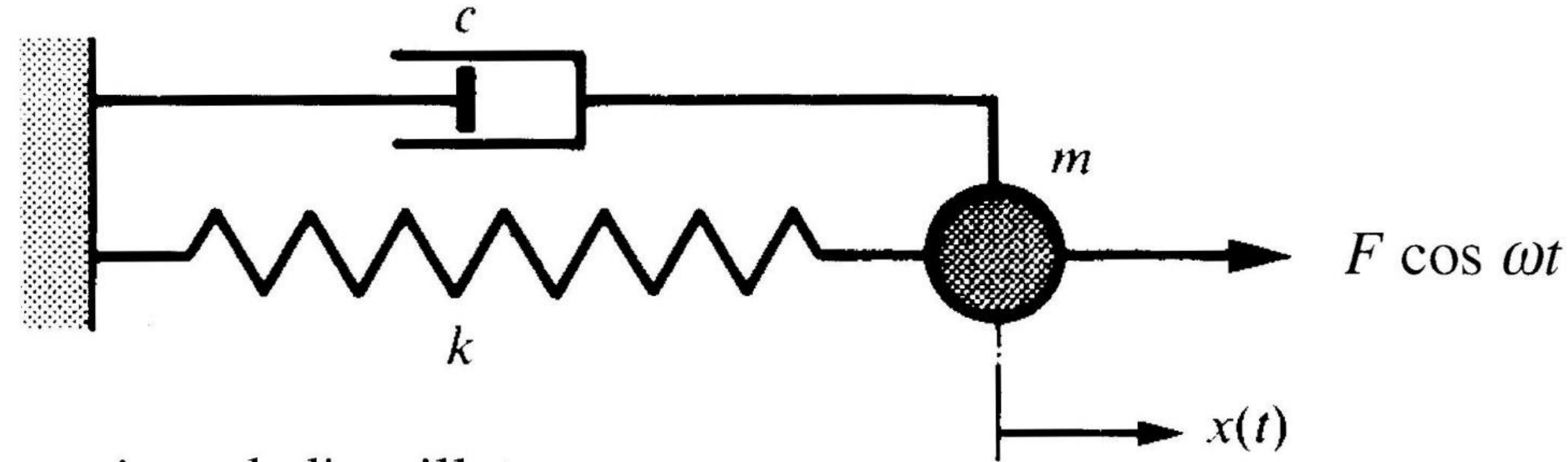
$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = F \cos \omega t \quad (4.1)$$

$$X(s) \left((s + \lambda)^2 + \omega_1^2 \right) = F \frac{s}{s^2 + \omega^2} + X_0 s + 2\lambda X_0 + V_0$$

$$X(s) = F \frac{s}{s^2 + \omega^2} \frac{1}{(s + \lambda)^2 + \omega_1^2} + \frac{X_0 s}{(s + \lambda)^2 + \omega_1^2} + \frac{2\lambda X_0 + V_0}{(s + \lambda)^2 + \omega_1^2}$$

$$X(s) = F \left(\frac{As}{s^2 + \omega^2} + \frac{B}{s^2 + \omega^2} \right) + F \left(\frac{Cs}{(s + \lambda)^2 + \omega_1^2} + \frac{D}{(s + \lambda)^2 + \omega_1^2} \right) + \frac{X_0 s}{(s + \lambda)^2 + \omega_1^2} + \frac{2\lambda X_0 + V_0}{(s + \lambda)^2 + \omega_1^2}$$

EPFL Régime harmonique – Solution permanente



Régime forcé harmonique de l'oscillateur
élémentaire

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = F \cos \omega t = f \quad (4.1)$$

Force d'excitation en notations complexes

$$f = \operatorname{Re}(\underline{f})$$

$$\underline{f} = F e^{j\omega t} = F(\cos \omega t + j \sin \omega t) \quad (4.15)$$

Déplacement en notations complexes

$$\begin{cases} \underline{x} = X e^{j(\omega t - \varphi)} \\ x = \operatorname{Re}(\underline{x}) \end{cases} \quad (4.16)$$

EPFL Régime harmonique – Solution permanente

Equation du mouvement en notations complexes

$$m \ddot{\underline{x}} + c \dot{\underline{x}} + k \underline{x} = \underline{f} \quad (4.17)$$

Dérivées du déplacement complexe

$$\underline{x} = X e^{j(\omega t - \varphi)}$$

$$\dot{\underline{x}} = j \omega X e^{j(\omega t - \varphi)} = j \omega \underline{x}$$

$$\ddot{\underline{x}} = -\omega^2 X e^{j(\omega t - \varphi)} = -\omega^2 \underline{x}$$

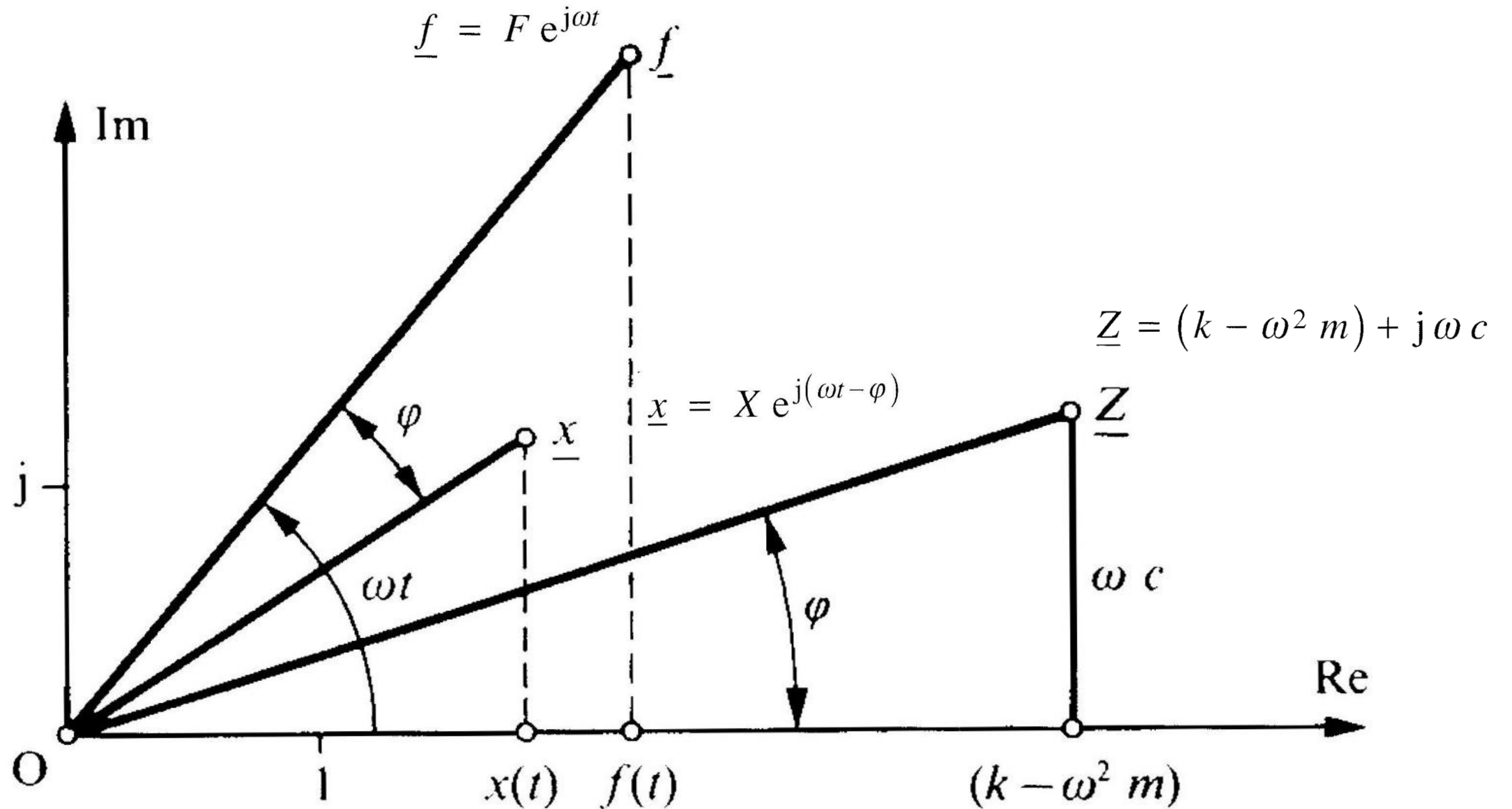
Caractérisation du déplacement complexe

$$\left((k - \omega^2 m) + j \omega c \right) \underline{x} = \underline{f} \quad (4.18)$$

Définition de l'impédance complexe

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= (k - \omega^2 m) + j \omega c & [\underline{Z}] &= \frac{\text{N}}{\text{m}} \\ &= \sqrt{(k - \omega^2 m)^2 + \omega^2 c^2} e^{j\varphi} & (4.19) \end{aligned}$$

EPFL Régime harmonique – Solution permanente



EPFL Fonctions de Transfert

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = f \quad (4.17)$$

$$\left((k - \omega^2 m) + j \omega c \right) \underline{x} = \underline{f} \quad (4.18)$$

Définition de l'*impédance complexe*

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= (k - \omega^2 m) + j \omega c & [\underline{Z}] &= \frac{\text{N}}{\text{m}} \\ &= \sqrt{(k - \omega^2 m)^2 + \omega^2 c^2} e^{j\varphi} & (4.19) \end{aligned}$$

Inverse de l'impédance complexe ou *admittance complexe*

$$\begin{aligned} \underline{Y} &= \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{(k - \omega^2 m) + j \omega c} & [\underline{Y}] &= \frac{\text{m}}{\text{N}} \\ &= \frac{e^{-j\varphi}}{\sqrt{(k - \omega^2 m)^2 + \omega^2 c^2}} & (4.20) \end{aligned}$$

EPFL Amplitude de la solution permanente

Définition du *déplacement statique* dû à une force constante F

$$\underline{f} = F e^{j\omega t} \quad X_s = \frac{F}{k} \quad (4.8)$$

Forme modifiée de l'amplitude de la solution permanente

$$\underline{x} = X e^{j(\omega t - \varphi)}$$

$$X e^{-j\varphi} = Y \cdot F \rightarrow X = |Y| \cdot F \rightarrow$$

$$X = X_s \cdot |Y|k = X_s |\underline{H}| = \frac{X_s}{\sqrt{(k - \omega^2 m)^2 + (\omega c)^2} / k} =$$
$$= \frac{X_s}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4\eta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

EPFL Amplitude de la solution permanente

Définition de la *pulsation relative de la force extérieure*

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (4.7)$$

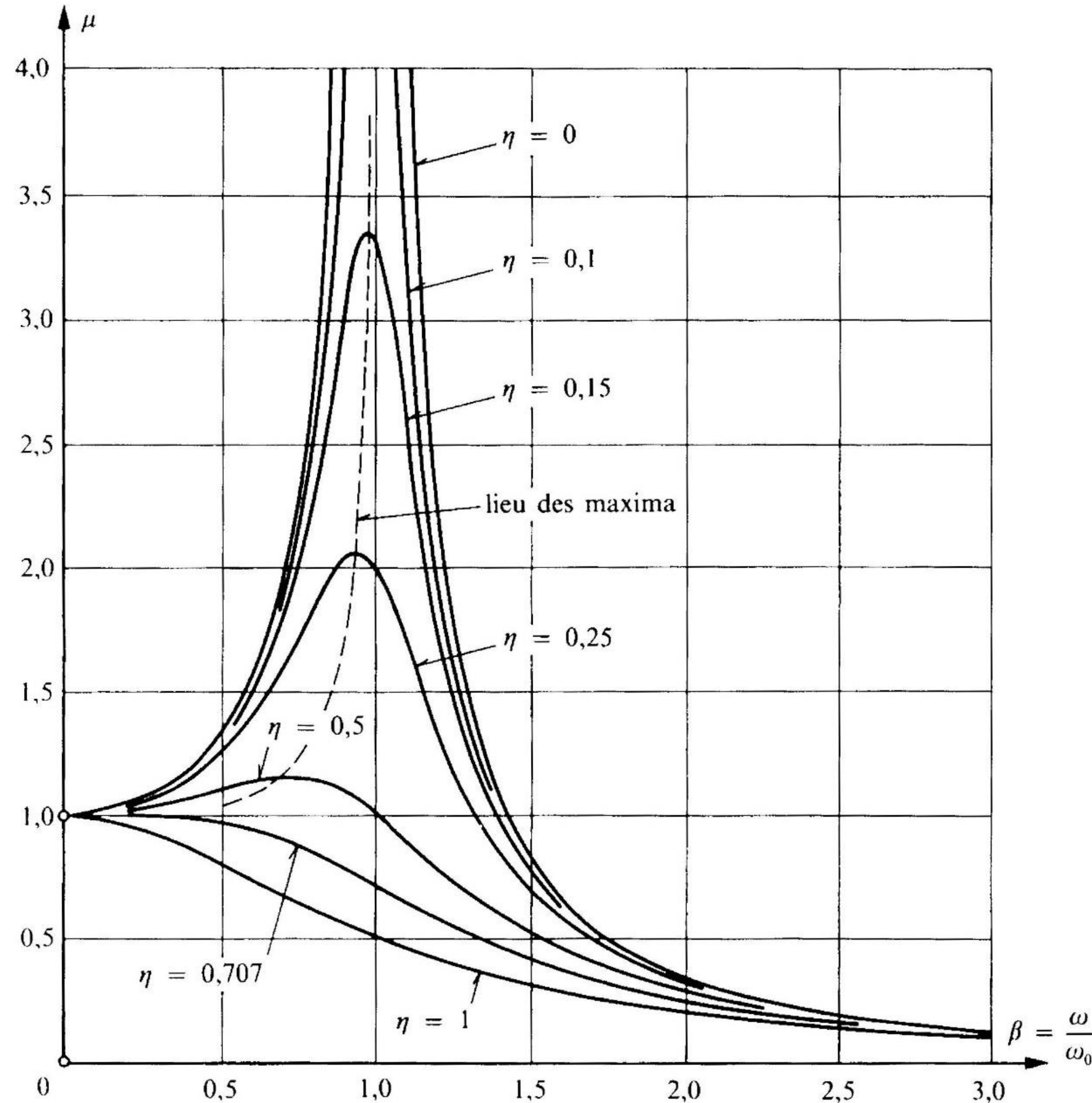
Définition du *facteur d'amplification dynamique*

$$\mu = \frac{X}{X_s} = |Y|k \quad (4.9)$$

Expression du *facteur d'amplification dynamique*
en fonction de η et de β

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4 \eta^2 \beta^2}} \quad (4.10)$$

EPFL Facteur d'amplification dynamique

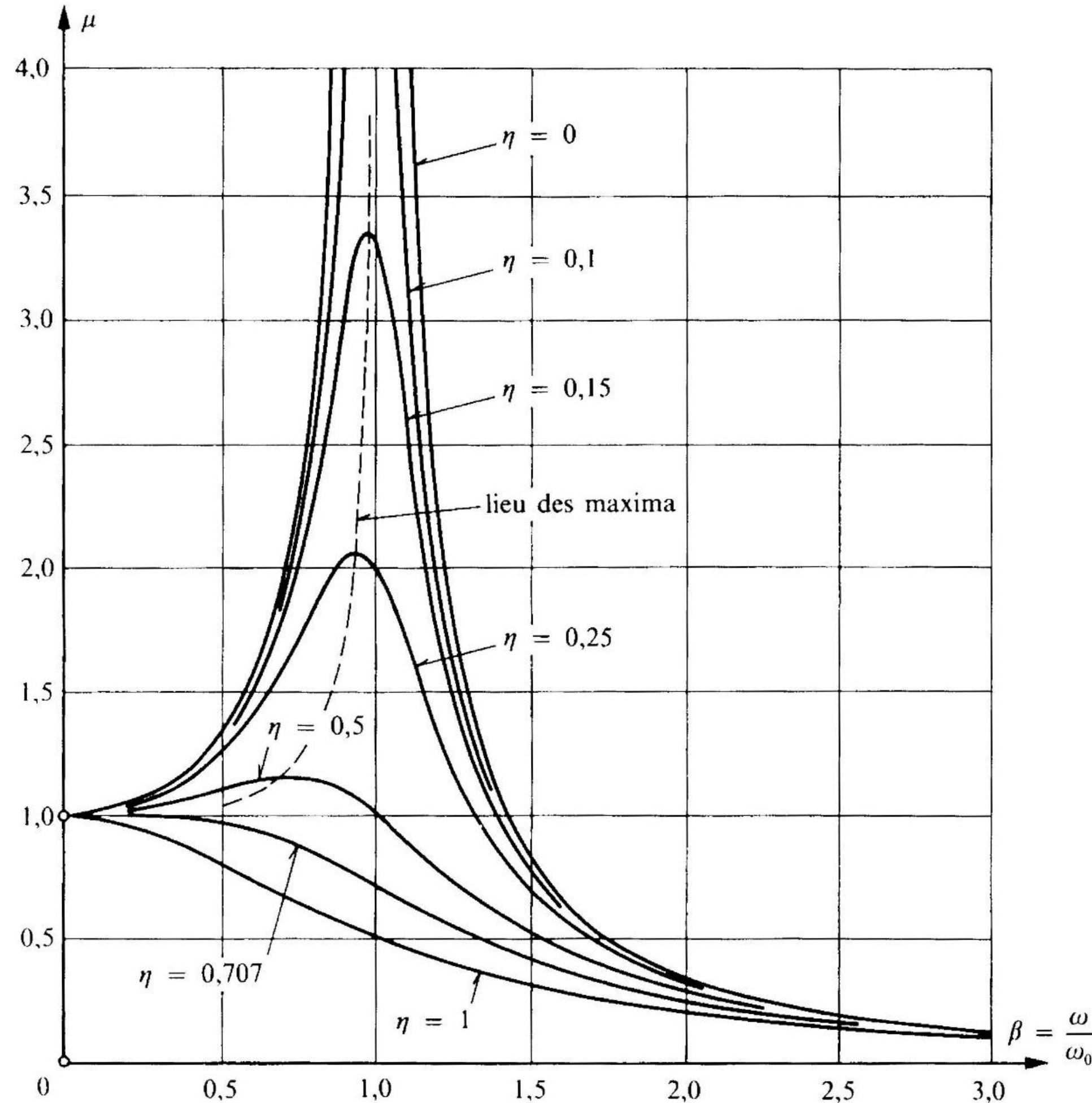


$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4 \eta^2 \beta^2}}$$

Commentaires sur le facteur d'amplification dynamique

- Toutes les courbes sont issues du point commun $\beta = \omega = 0, \mu = 1$.
- Elles passent par un maximum (sauf si $\eta \geq \sqrt{2}/2 = 0,707$) pour tendre vers zéro quand la pulsation tend vers l'infini.
- L'oscillateur est en *résonance d'amplitude* quand X est maximum.

EPFL Facteur d'amplification dynamique



$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4 \eta^2 \beta^2}} \quad (4.10)$$

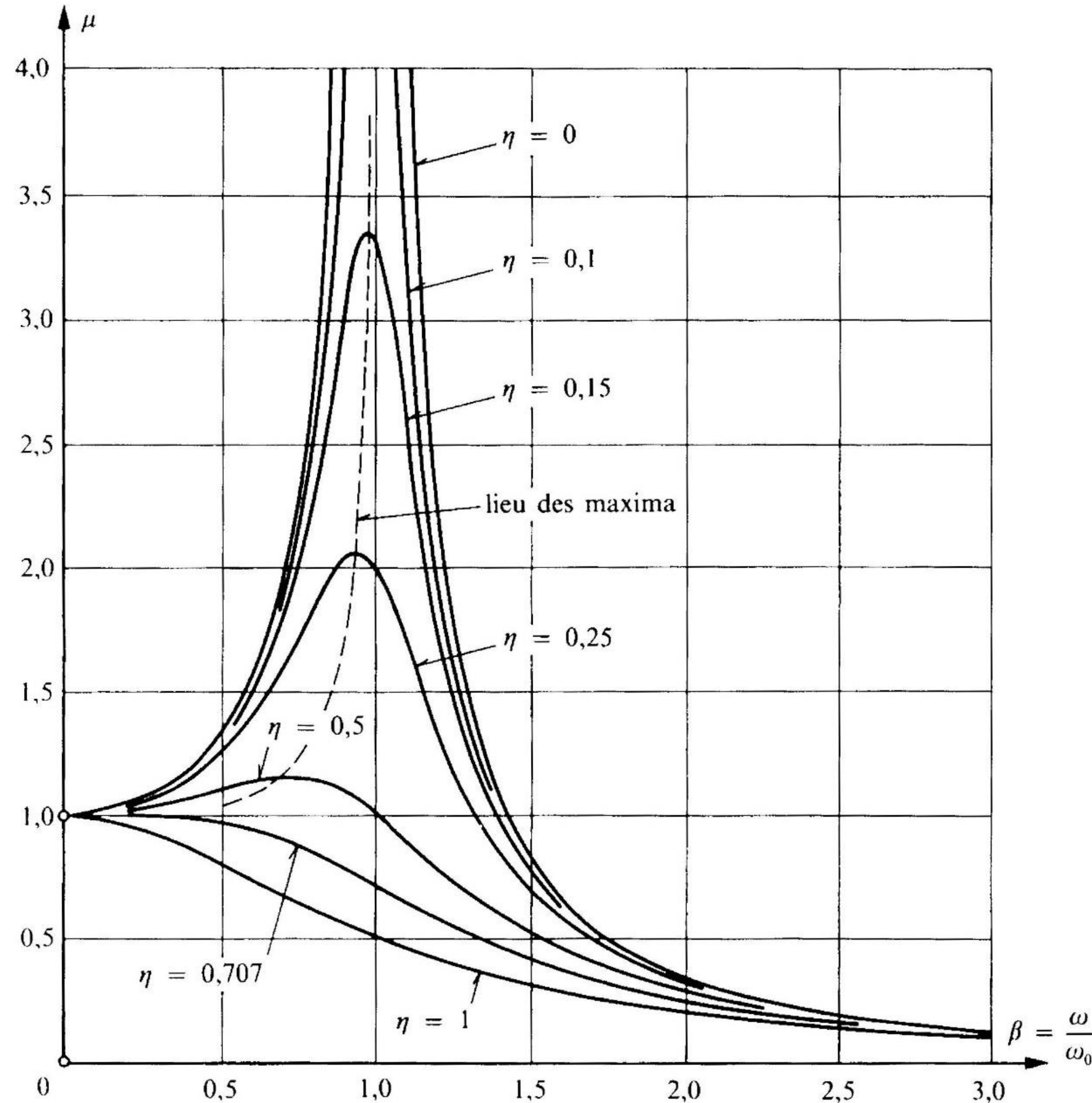
Recherche de la résonance d'amplitude

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\beta} \left((1 - \beta^2)^2 + 4 \eta^2 \beta^2 \right) &= 0 \\ \Rightarrow \beta(-1 + \beta^2 + 2 \eta^2) &= 0 \end{aligned}$$

Définition de la *pulsation de résonance d'amplitude*

$$\omega_2 = \omega_0 \sqrt{1 - 2 \eta^2} \quad (4.11)$$

EPFL Facteur d'amplification dynamique



$$\omega_2 = \omega_0 \sqrt{1 - 2 \eta^2} \quad (4.11)$$

Facteur d'*amplification dynamique maximum*

$$\mu_{\max} = \frac{1}{2 \eta \sqrt{1 - \eta^2}} \quad (4.12)$$

Valeur du facteur d'*amplification dynamique* en
 $\beta = 1$ ($\omega = \omega_0$)

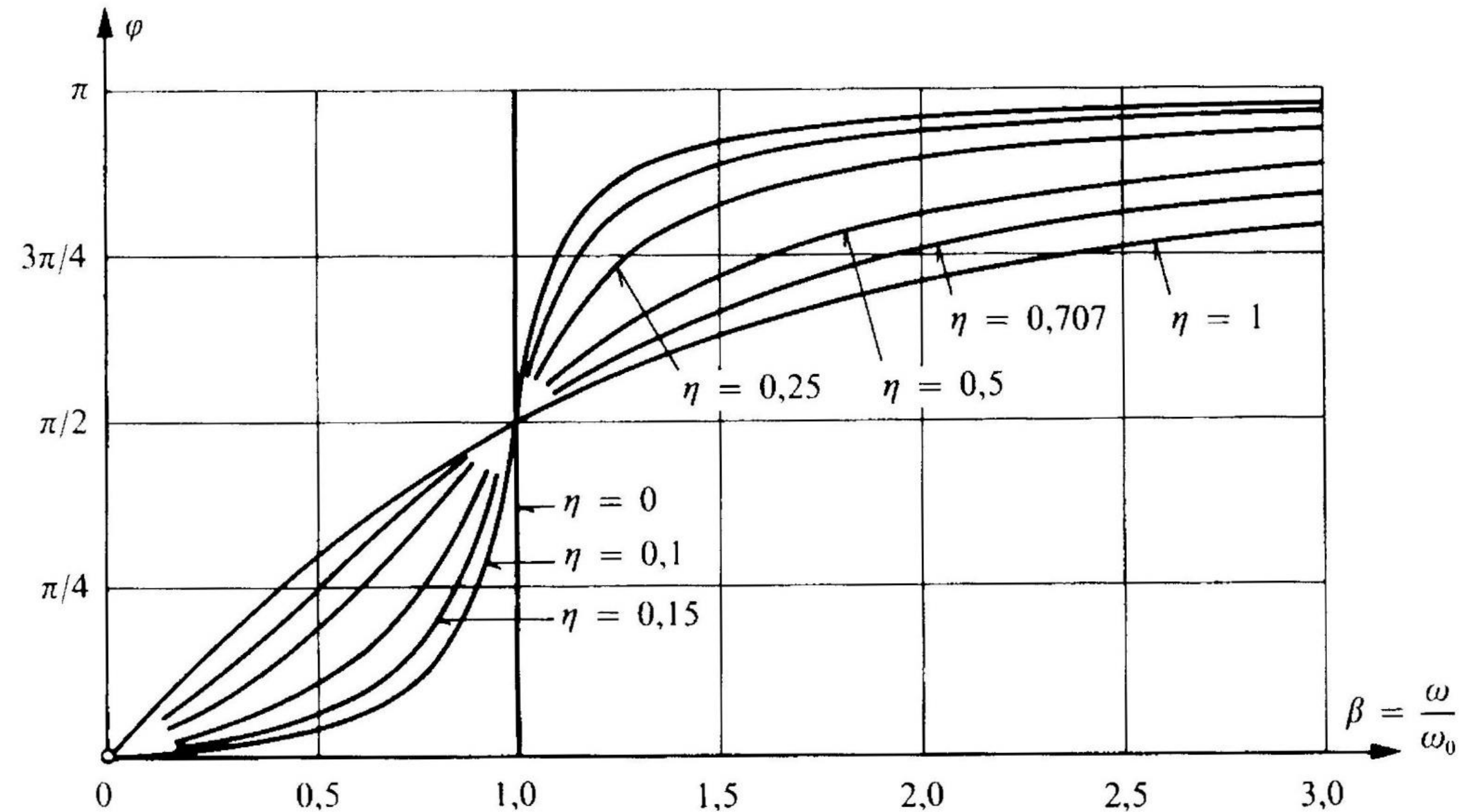
$$\mu_0 = \frac{1}{2 \eta} \quad (4.13)$$

$$\mu_0 \approx \mu_{\max} \quad \text{si} \quad \eta \ll 1$$

EPFL Déphasage entre solution et force extérieure

Expression du *déphasage du déplacement* sur la force extérieure en fonction de la pulsation relative β

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{\omega c}{k - \omega^2 m} = \frac{\omega \frac{c}{k}}{1 - \omega^2 \frac{m}{k}} \\ &= \frac{2 \eta \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{2 \eta \beta}{1 - \beta^2} \end{aligned} \quad (4.14)$$

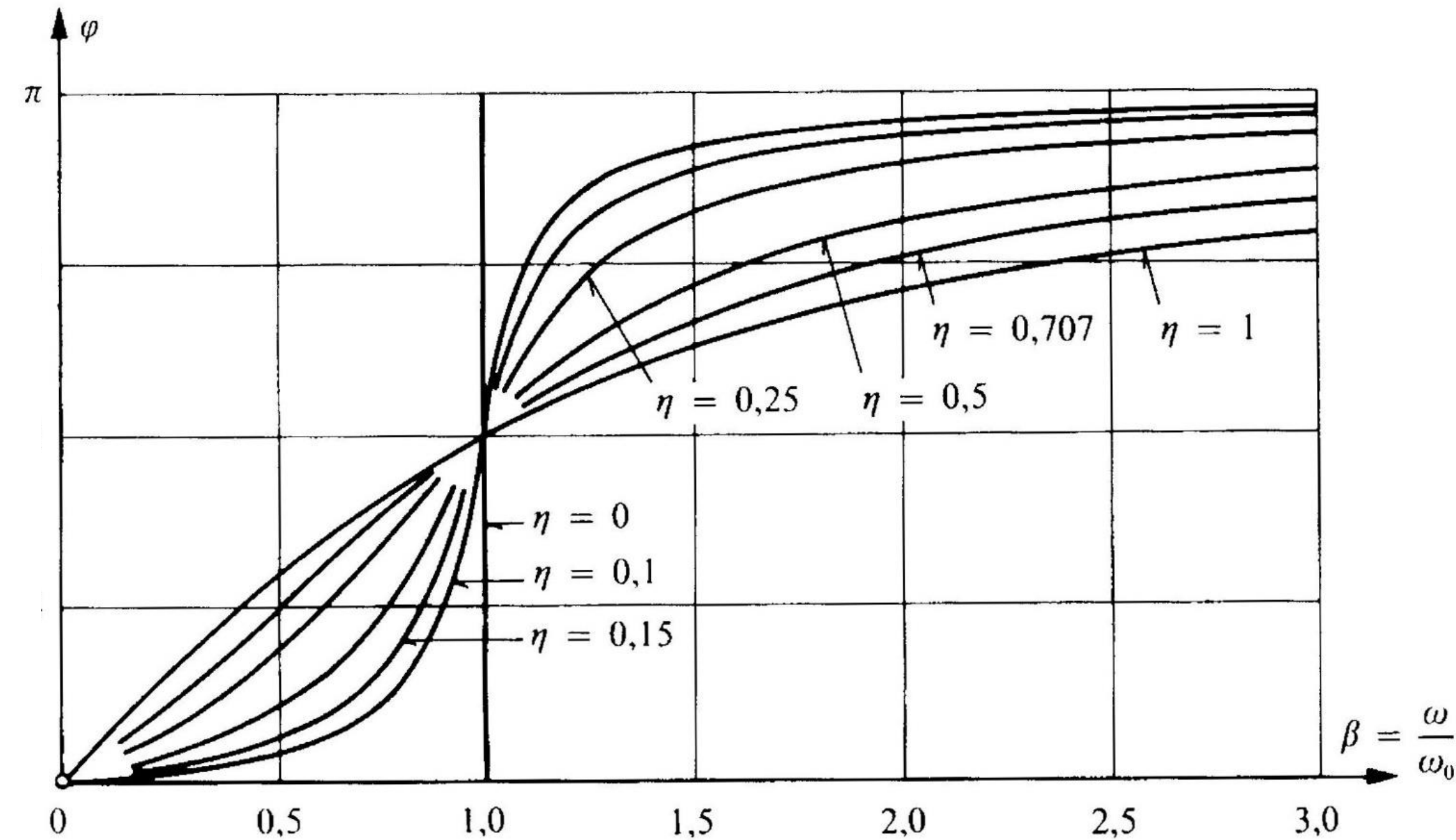


EPFL Déphasage entre solution et force extérieure

Commentaires sur le déphasage

Force extérieure et déplacement

- en phase ($\varphi = 0$) si $\beta \rightarrow 0$;
- en quadrature ($\varphi = \frac{\pi}{2}$) si $\beta = 1$ (oscillateur en *résonance de phase* en $\omega = \omega_0$);
- en opposition de phase ($\varphi = \pi$) si $\beta \rightarrow \infty$.



EPFL Résonance de Vitesse

Vitesse associée au déplacement permanent

$$\underline{\dot{x}} = j\omega X e^{j(\omega t - \varphi)} = jV e^{j(\omega t - \varphi)} \rightarrow \dot{x} = \text{Re}(\underline{\dot{x}}) = -V \sin(\omega t - \varphi)$$

avec

$$V = \omega X = \omega X_s \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4 \eta^2 \beta^2}} = \omega_0 X_s \frac{\beta}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4 \eta^2 \beta^2}} \quad (4.34)$$

Condition de *résonance de vitesse*

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \beta} = 0 &\Rightarrow (1 - \beta^2) \cdot (1 + \beta^2) = 0 \\ &\Rightarrow \beta = 1 \quad \Rightarrow \omega = \omega_0 \end{aligned}$$

EPFL Résonance d'Accélération

Accélération associée au déplacement permanent

$$\ddot{x} = -\omega^2 X e^{j(\omega t - \varphi)} = jA e^{j(\omega t - \varphi)} \rightarrow \dot{x} = \text{Re}(\dot{x}) = -A \cos(\omega t - \varphi)$$

avec

$$A = \omega^2 X = \omega^2 X_s \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4 \eta^2 \beta^2}} = \omega_0^2 X_s \frac{\beta^2}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4 \eta^2 \beta^2}} \quad (4.35)$$

Condition de *résonance d'accélération*

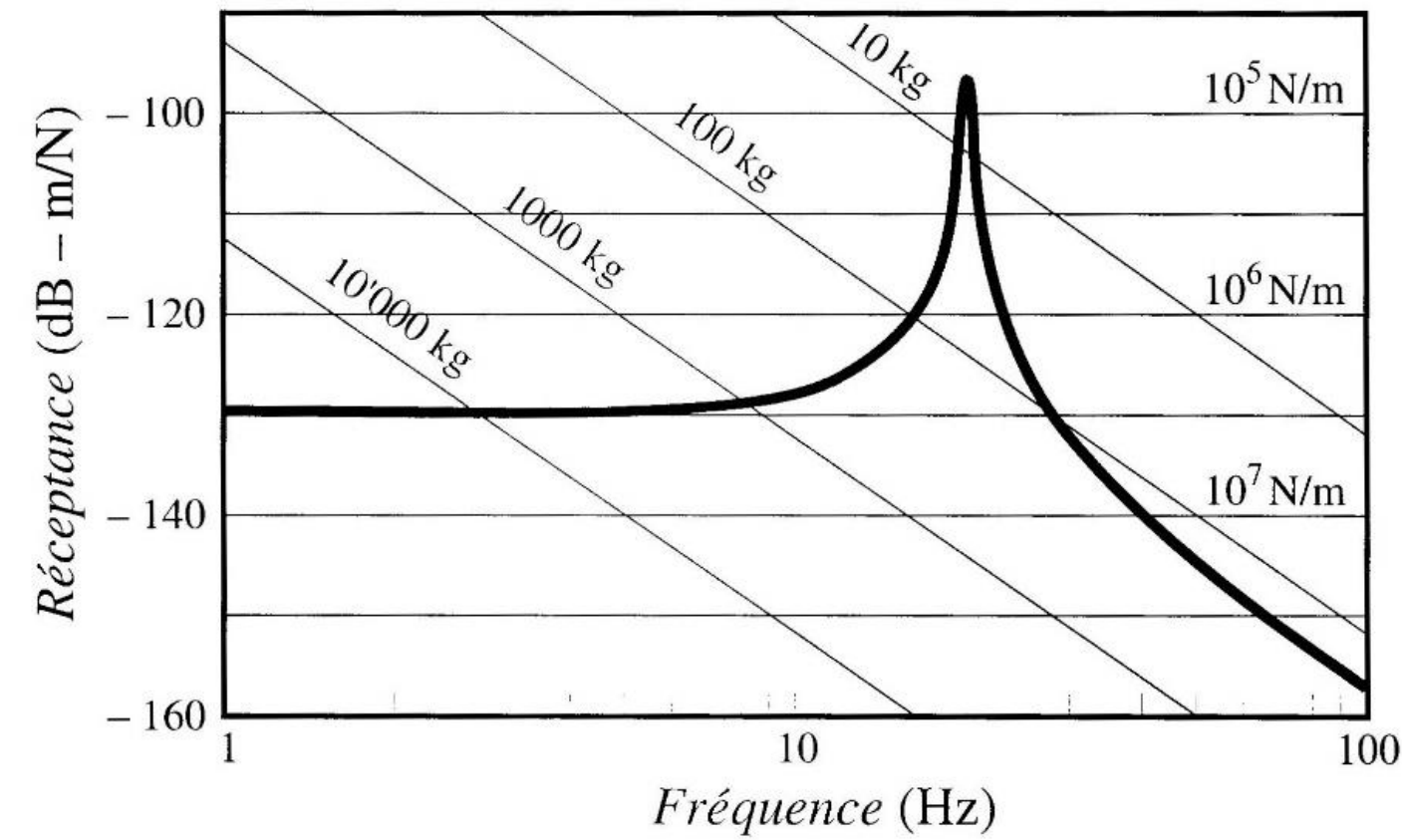
$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial \beta} = 0 &\Rightarrow \beta^2 (1 - 2 \eta^2) - 1 = 0 \\ &\Rightarrow \beta_3 = \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \eta^2}} \end{aligned}$$

Pulsation de résonance d'accélération

$$\omega_3 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - 2 \eta^2}} > \omega_0 \quad (4.36)$$

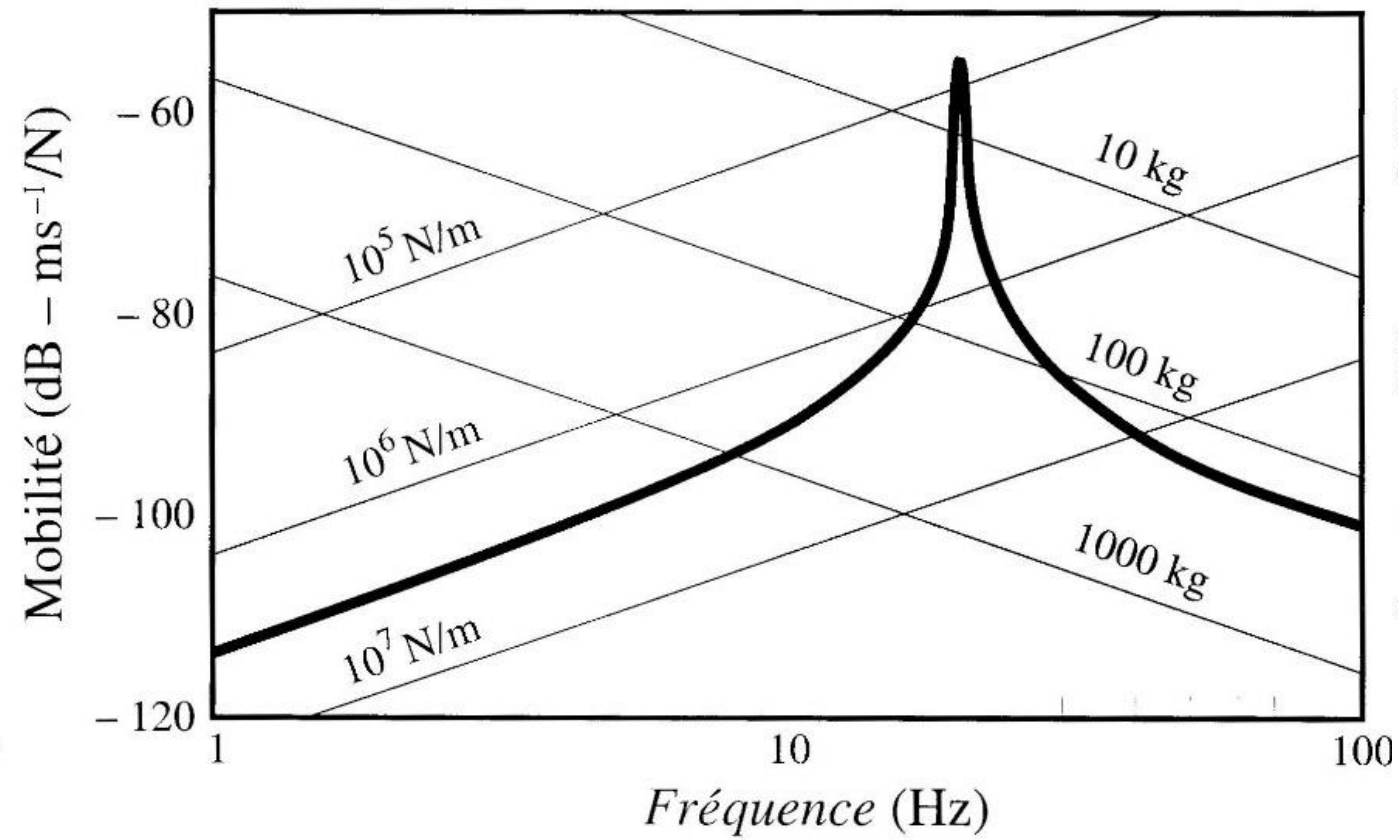
EPFL Fonctions de Transfert

Position, X



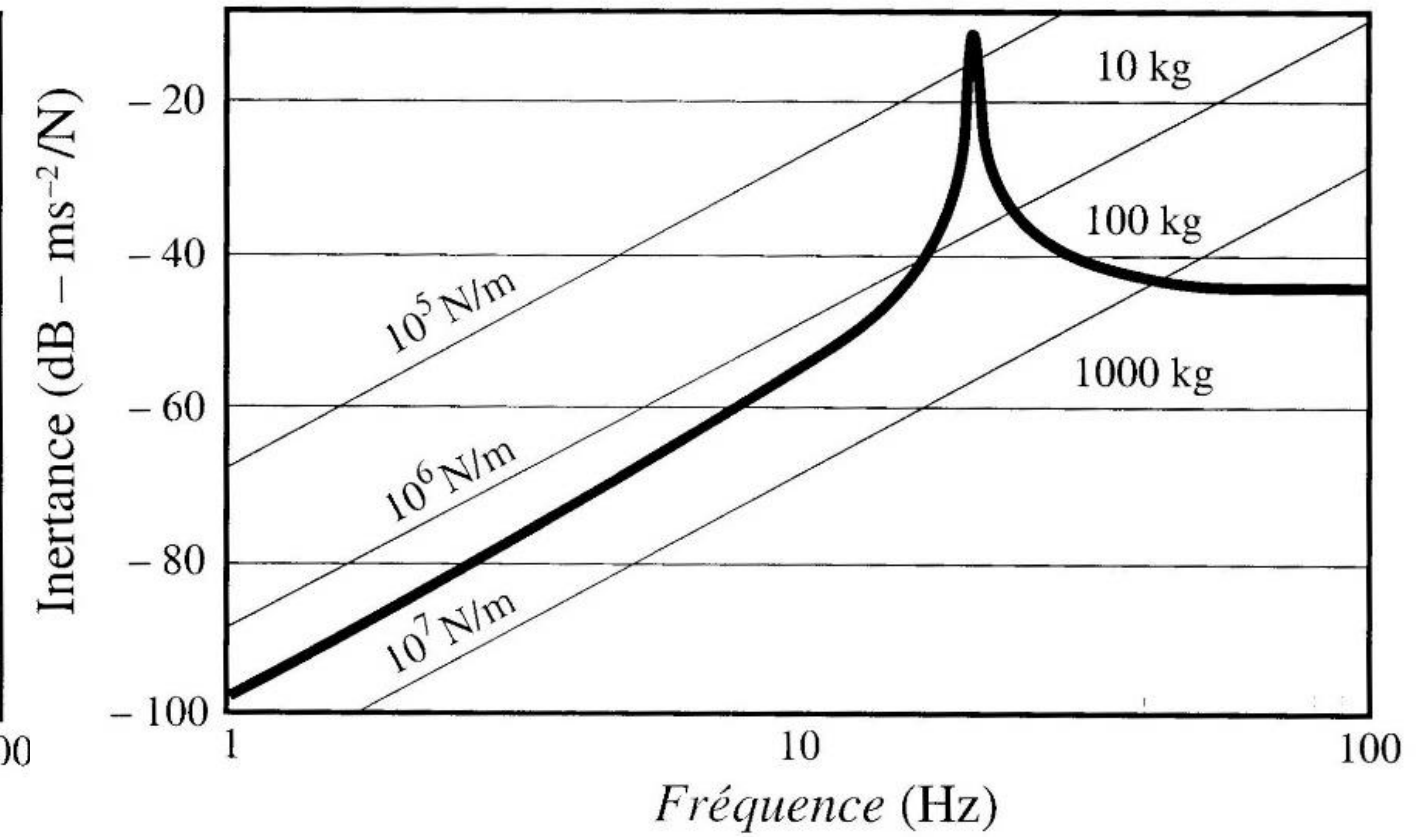
$$\frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\eta^2\beta}}$$

Vitesse, V



$$\frac{\beta}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\eta^2\beta}}$$

Acceleration, A



$$\frac{\beta^2}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\eta^2\beta}}$$

EPFL Puissance consommée en régime permanent

Puissance instantanée fournie au système

$$p(t) = f(t) \dot{x}(t)$$

$$= -F \cos \omega t \cdot \omega X \sin(\omega t - \varphi) = -\omega X F \cos \varphi \cos \omega t \sin \omega t + \omega X F \sin \varphi \cos^2 \omega t = p_r(t) + p_a(t)$$

Puissance réactive (énergie nulle sur une période)

$$p_r(t) = -\omega X F \cos \varphi \cos \omega t \sin \omega t$$

Puissance active consommée par l'amortisseur

$$p_a(t) = \omega X F \sin \varphi \cos^2 \omega t$$

EPFL Puissance consommée en régime permanent

Perte d'énergie sur une période

$$\begin{aligned} H_d &= \omega X F \sin \varphi \int_0^T \cos^2 \omega t \, dt \\ &= \pi X F \sin \varphi \\ &= \frac{\pi \omega c F^2}{(k - \omega^2 m)^2 + \omega^2 c^2} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Puissance efficace (puissance moyenne consommée)

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \frac{H_d}{T} = \frac{H_d \omega}{2\pi} \\ &= \frac{\omega^2 c F^2}{2((k - \omega^2 m)^2 + \omega^2 c^2)} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Puissance moyenne consommée quand $\omega = \omega_0$
et $\eta = 1$ (amortissement critique)

$$\bar{p}_0 = \frac{F^2}{4 m \omega_0} \quad (4.31)$$

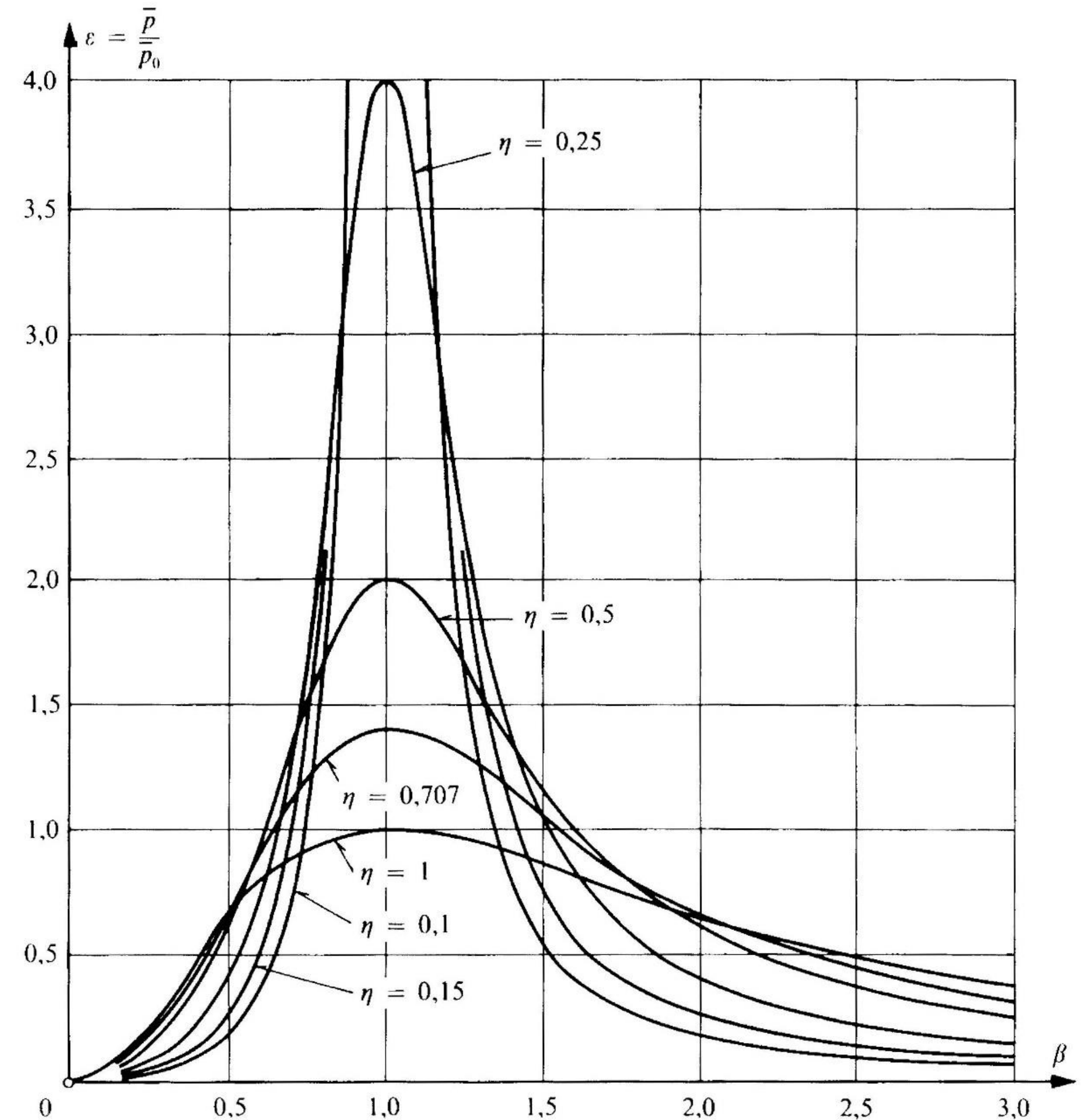
EPFL Puissance consommée en régime permanent

Définition de la *puissance relative*

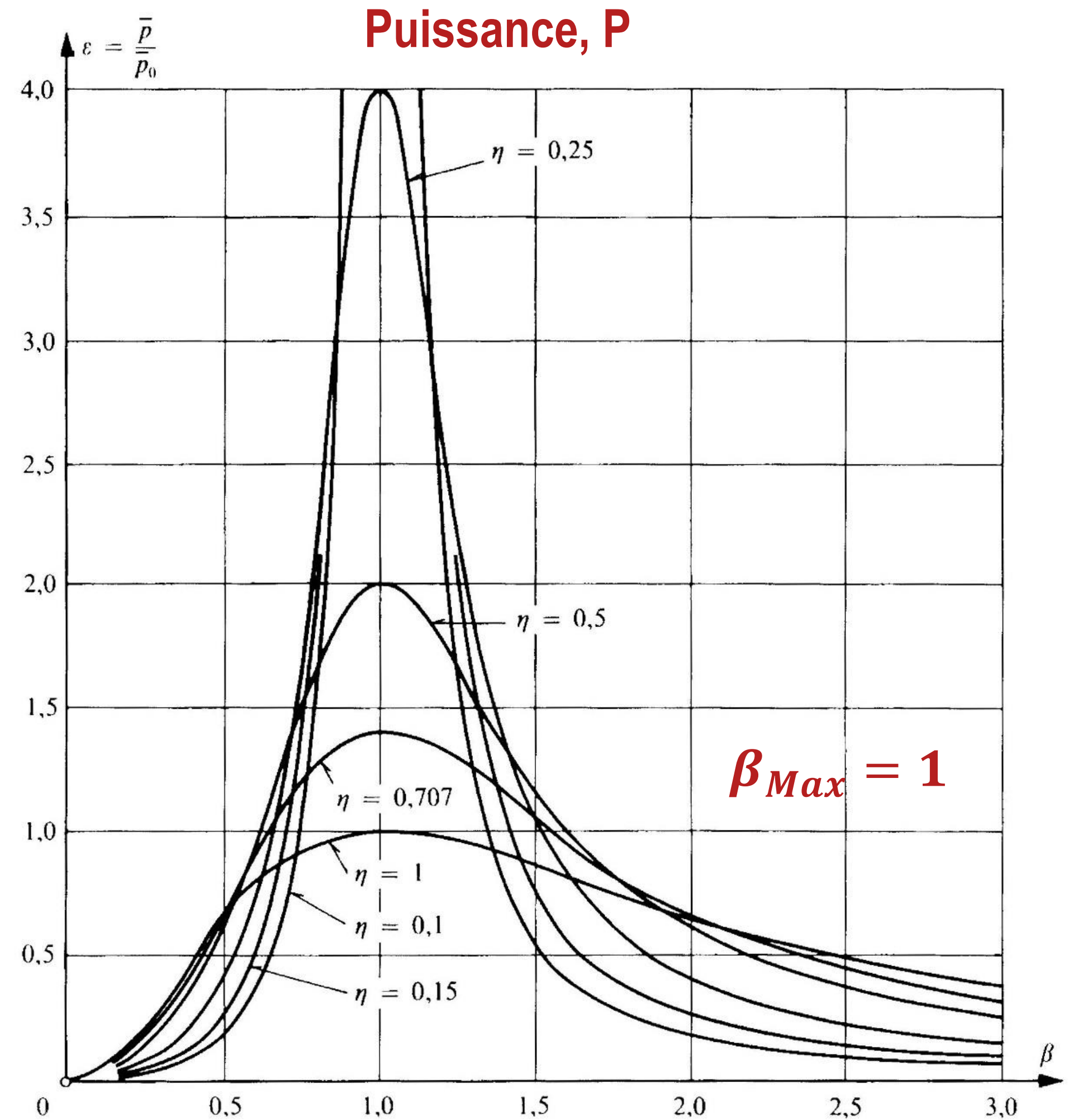
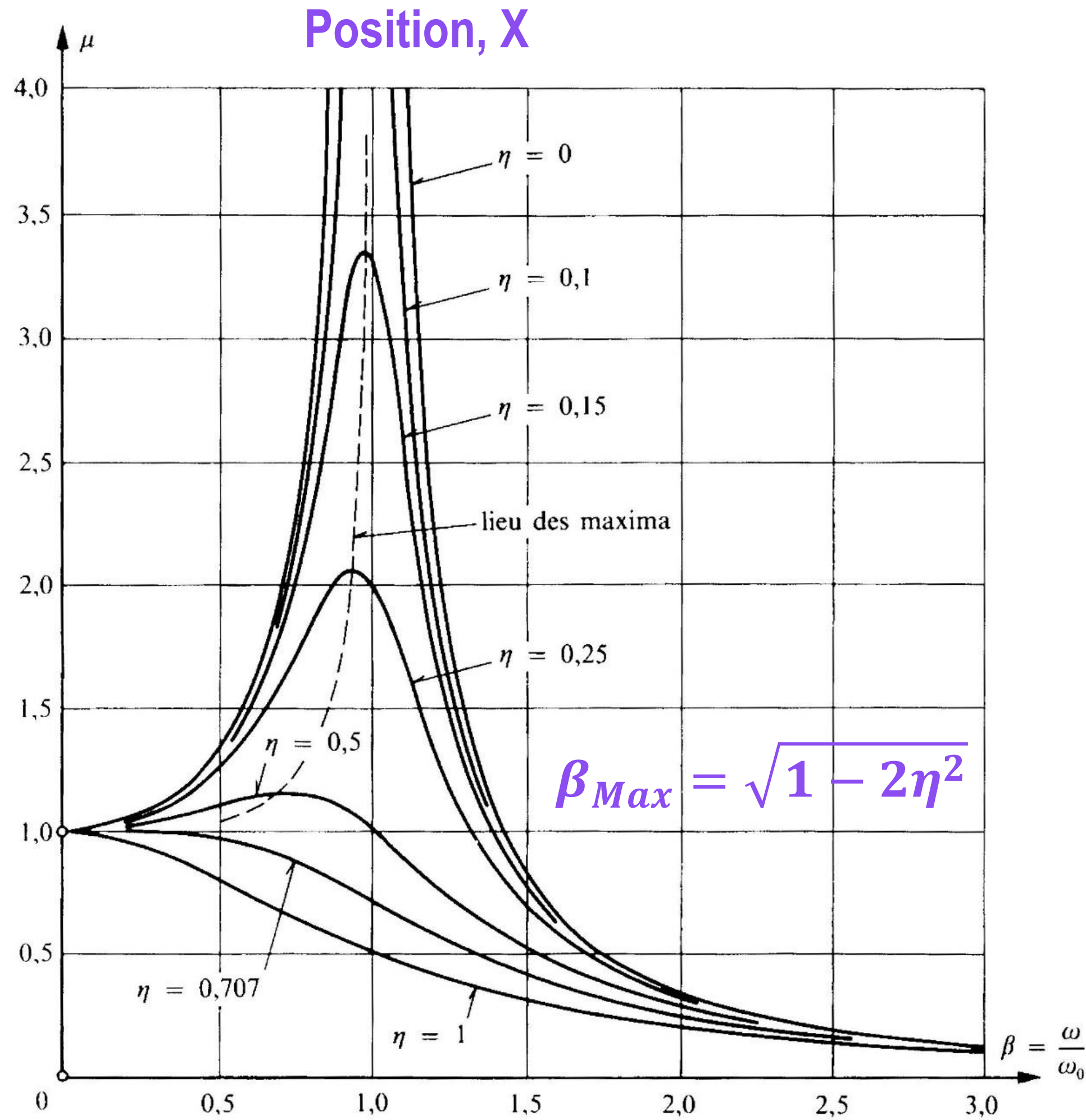
$$\varepsilon = \frac{\bar{p}}{\bar{p}_0} = \frac{2 m \omega_0 \omega^2 c}{(k - \omega^2 m)^2 + \omega^2 c^2}$$
$$= \frac{4 \eta \beta^2}{(1 - \beta^2)^2 + 4 \eta^2 \beta^2} \quad (4.32)$$

Résonance de puissance

$$\varepsilon_{\max} = \frac{1}{\eta} \quad \text{pour } \omega = \omega_0 \quad (\beta = 1) \quad (4.33)$$



EPFL Puissance vs. Position



EPFL Résumé des pulsations

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pulsation propre sans amortissement} \\ \text{pulsation de résonance de phase} \\ \text{pulsation de résonance de vitesse} \\ \text{pulsation de résonance de puissance} \end{array} \right.$$

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \eta^2} \quad \text{pulsation propre avec amortissement}$$

$$\omega_2 = \omega_0 \sqrt{1 - 2\eta^2} \quad \text{pulsation de résonance d'amplitude}$$

$$\omega_3 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - 2\eta^2}} \quad \text{pulsation de résonance d'accélération}$$

Classement des pulsations

$$\omega_2 < \omega_1 < \omega_0 < \omega_3 \quad (4.37)$$

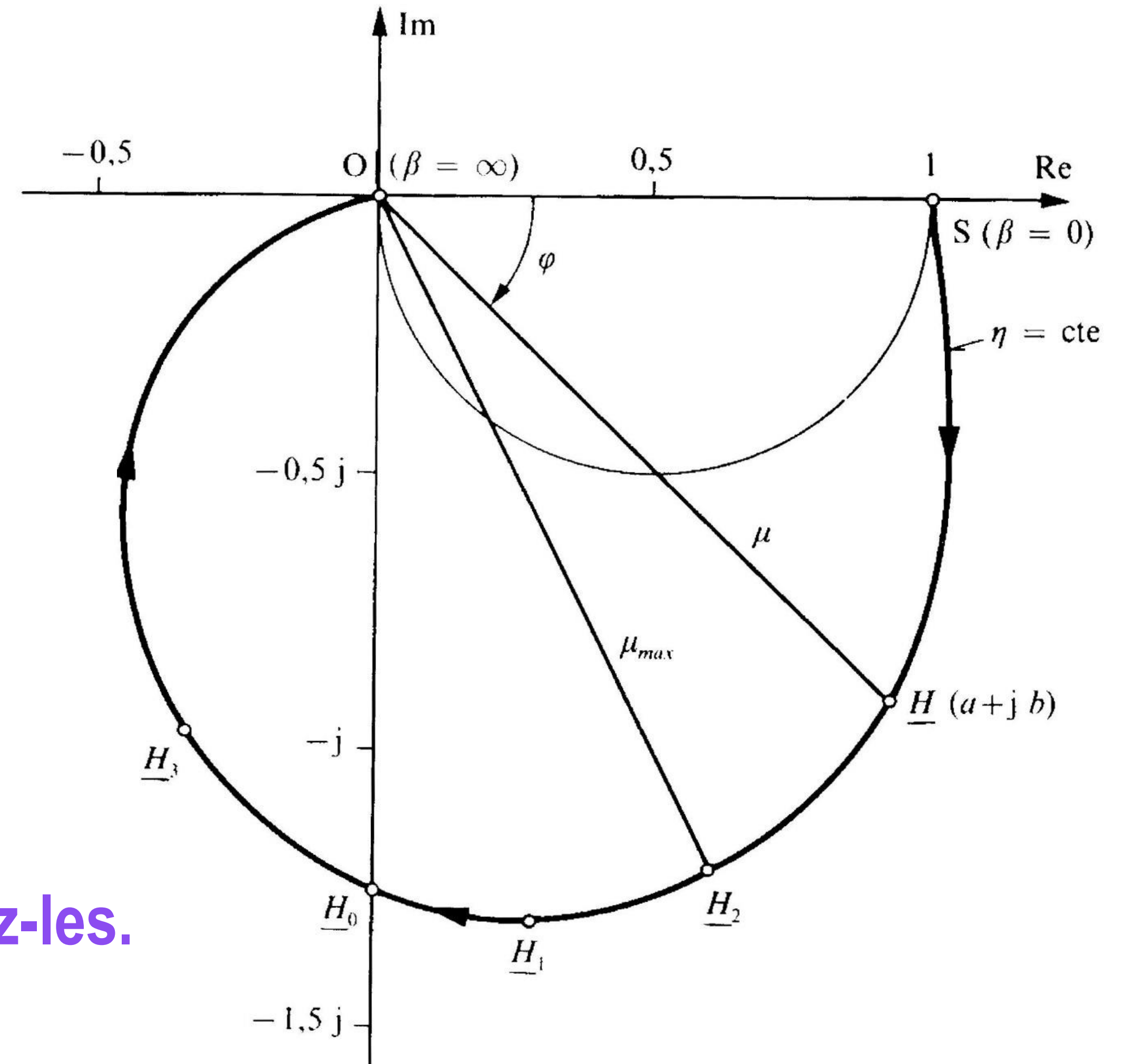
EPFL Diagramme de Nyquist

$$\underline{H} = \mu e^{-j\varphi} = \frac{1}{(1 - \beta^2) + 2j\eta\beta}$$

Points caractéristiques du diagramme de Nyquist

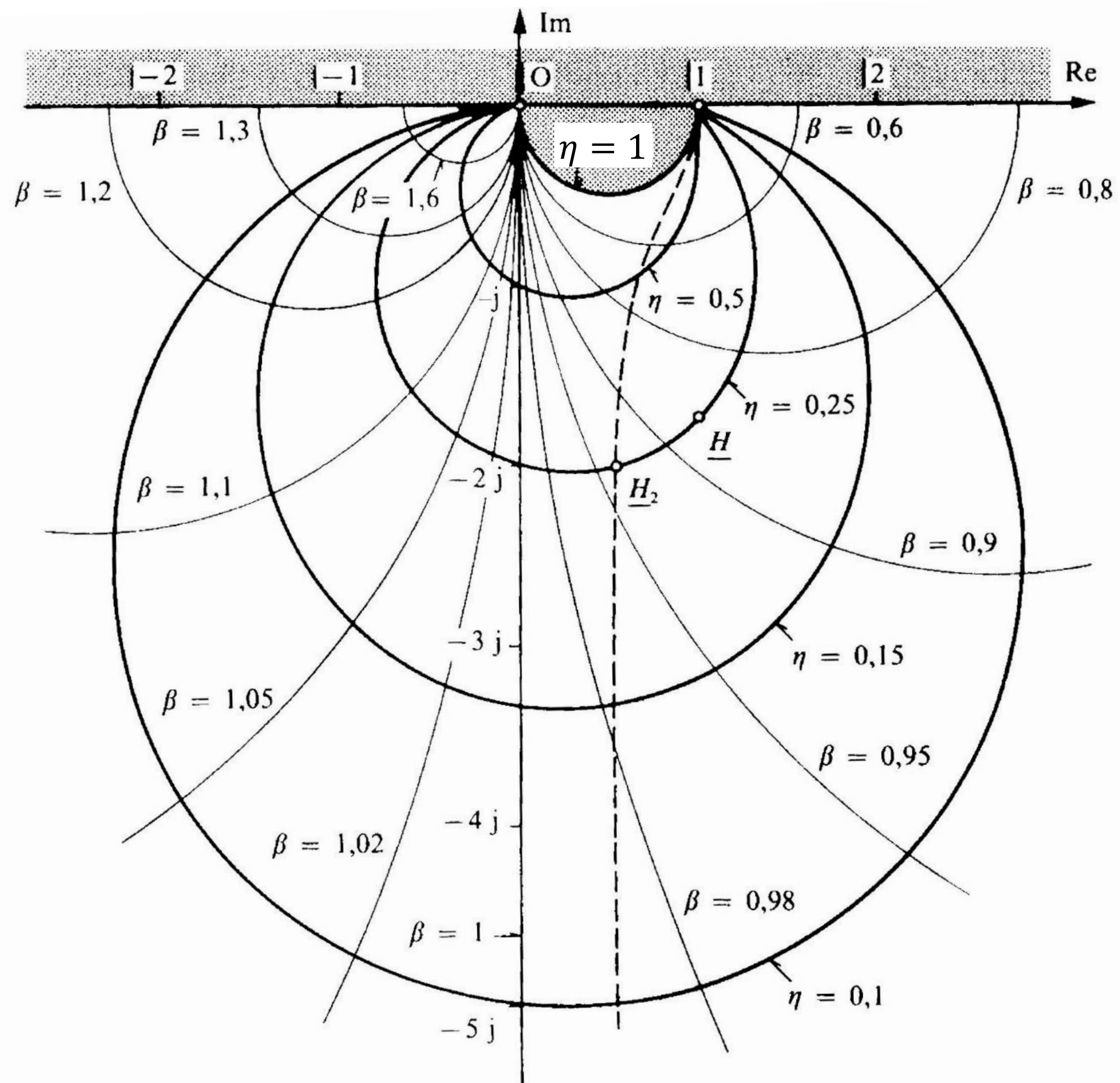
$$\underline{H} = \underline{H}(\beta)$$

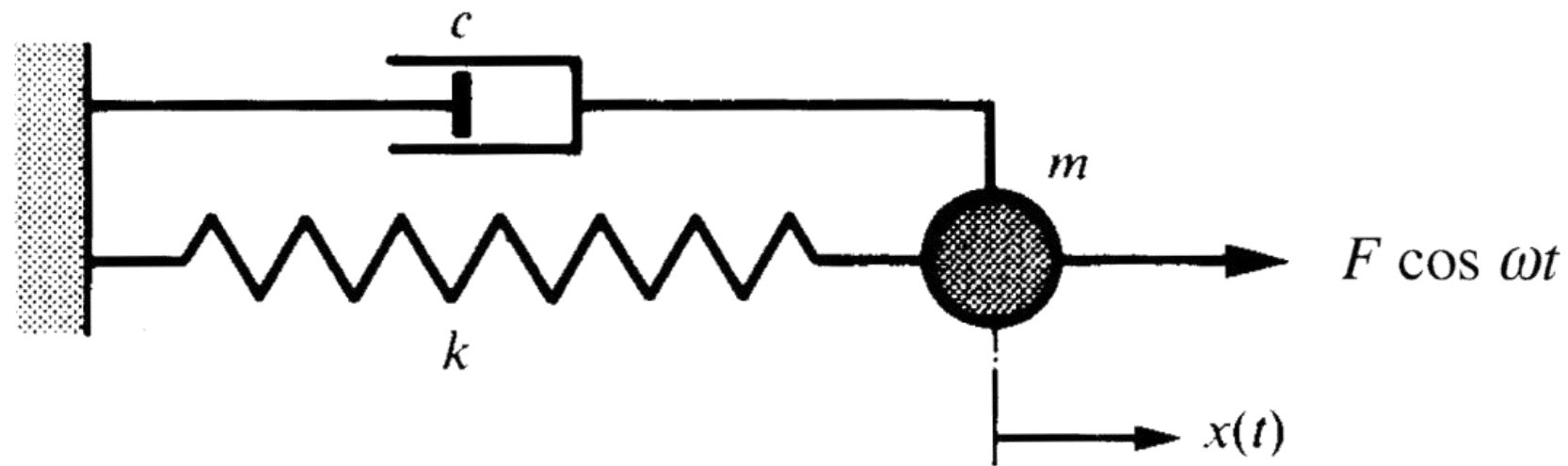
$$\begin{array}{cccc} \underline{H}_2 & \underline{H}_1 & \underline{H}_0 & \text{et } \underline{H}_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \beta_2 & \beta_1 & \beta_0 & \beta_3 \end{array}$$



Où sont H_0 , H_1 , H_2 et H_3 ? Calculez-les.

EPFL Diagramme de Nyquist





$$\underline{\underline{x}} = \frac{\underline{\underline{f}}}{k - m\omega^2 + jc\omega} = \frac{F e^{j\omega t}}{k - m\omega^2 + jc\omega}$$

$$\underline{\underline{x}} = \frac{k}{k - m\omega^2 + jc\omega} \frac{f}{k} = \underline{\underline{H}} \frac{f}{k} = \underline{\underline{Y}} \cdot \underline{\underline{f}}$$

$$\underline{\underline{H}} = \frac{k}{k - m\omega^2 + jc\omega} = \frac{1}{1 - \beta^2 + j2\eta\beta}$$

$$\underline{\underline{H}} = \mu e^{-j\varphi}; \mu = X/X_s$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pulsation propre sans amortissement} \\ \text{pulsation de résonance de phase} \\ \text{pulsation de résonance de vitesse} \\ \text{pulsation de résonance de puissance} \end{array} \right.$$

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \eta^2} \quad \text{pulsation propre avec amortissement}$$

$$\omega_2 = \omega_0 \sqrt{1 - 2\eta^2} \quad \text{pulsation de résonance d'amplitude}$$

$$\omega_3 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - 2\eta^2}} \quad \text{pulsation de résonance d'accélération}$$

Classement des pulsations

$$\omega_2 < \omega_1 < \omega_0 < \omega_3 \quad (4.37)$$